

## Решение уравнений методом дихотомии

При решении практических задач бывает необходимо найти корни довольно сложных уравнений. В этом случае на помощь может прийти компьютер. С помощью программы на языке Pascal, разработанной автором, можно находить корни сложных уравнений с одним неизвестным в любой степени методом дихотомии.

*Дихотомия* - от греческого *dichotomia* - разделение надвое.

Существует довольно очевидная теорема: "Если непрерывная функция на концах некоторого интервала имеет значения разных знаков, то внутри этого интервала у нее есть корень (как минимум, один, но м.б. и несколько)". Вот на базе этой теоремы и построено численное нахождение приближенного значения корня функции. Обобщенно этот метод называется "дихотомией", т.е. "делением отрезка на две части". Обобщенный алгоритм выглядит так:

- задать начальный интервал  $[X_{\text{left}}..X_{\text{right}}]$ ;
- убедиться, что на концах функция имеет разные знаки;
- повторять
  - выбрать внутри интервала точку  $X$ ;
  - сравнить знак функции в точке  $X$  со знаком функции в одном из концов;
  - если совпадает, то переместить этот конец интервала в точку  $X$ ;
  - иначе переместить в точку  $X$  другой конец интервала,

пока не будет достигнута нужная точность.

Для решения этого уравнения воспользуемся «методом половинного деления». Этот метод предусматривает цикл, и поскольку Excel для циклических задач не подходит – воспользуемся *Pascal*ем.

Рассмотрим два примера.

### **1. Решение уравнения $X^2=2^X$ , т.е. $Y_x=X^2-2^X=0$ методом дихотомии**

В программе необходимо ввести нужное уравнение, сделать эскиз графика функции или разбить функцию на левую и правую части. Например,  $Y_x=X^2-2^X=0$  преобразовать в  $X^2=2^X$  и эскизно построить эти две функции, найти приблизительно точки пересечения (корни уравнения). В программе задать точку  $X_1$ , находящуюся левее предполагаемого корня, и точку  $X_2$ , находящуюся правее предполагаемого корня. Затем ввести необходимую точность (например, 0,001). Программа найдет корень с заданной точностью методом дихотомии. Если точек пересечения (корней) несколько, аналогично поступить с остальными.

Далее приводится тест программы с необходимыми пояснениями.

```
PROGRAM dixot;
uses crt;
var x,x1,x2,y2,yx,t:real;
begin
  textbackground(0);
  clrscr;
  textcolor(14);
  writeln('Решение ур-я  $x^2=2^x$ , т.е.  $Y_x=x^2-2^x=0$  методом дихотомии');
  writeln('(Последовательным приближением путём деления отрезка пополам)');
  textcolor(12);
  writeln('Введите левое и правое значение X, в которых ф-я  $Y_x$  имеет разные знаки');
  write('Введите левое значение: X1=');
  read(x1);
```

```

write('Введите правое значение: X2=');
read(x2);
write('Введите точность (например точность ур-я Yx не 0, а 0.001): t=');
read(t);
textcolor(15);
yx:=1;
while (yx>t) or (yx<-t) do {пока не достигнута заданная точность- выполнять}
begin
  y2:=x2*x2-exp(x2*ln(2)); {знач. у по x2}
  x:=(x2+x1)/2; {выбираем точку внутри интервала}
  yx:=x*x-exp(x*ln(2)); {знач. у по x внутри интервала}
  if ((y2>=0) and (yx>=0)) or ((y2<0) and (yx<0)) then {при совпадение знаков}
    x2:=x {перемещаем точку X2 в точку X}
  else {иначе}
    x1:=x {перемещаем точку X1 в точку X}
  write('При X=',x:8:5);
  write(' Yx=',Yx:8:5);
  write(' x1=',x1:8:5);
  writeln(' x2=',x2:8:5);
  {readkey;}
end;
writeln(' Достигнута заданная точность!');
textcolor(11);
writeln('Для поиска другого корня вводите новый диапазон X1;X2 (По эскизу графика ф-ий)');
readkey
end.

```

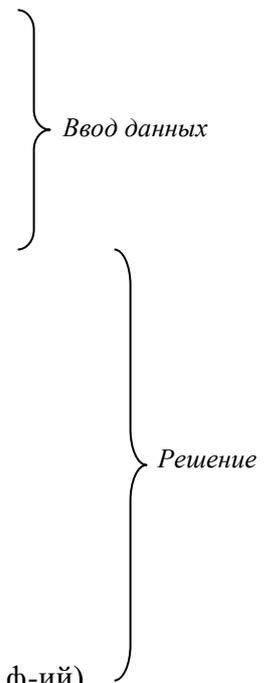
Далее представлено, как выглядит решение программы на экране.

На экране:

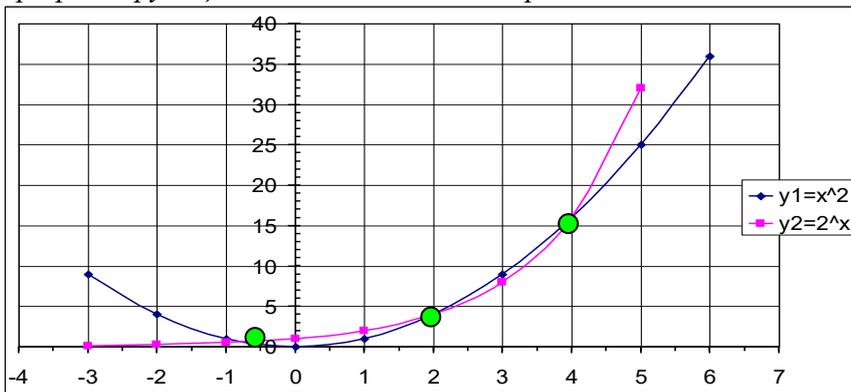
```

Решение ур-я  $x^2=2^x$ , т.е.  $Yx=x^2-2^x=0$  методом дихотомии
(Последовательным приближением путём деления отрезка пополам)
Введите левое и правое значение X, в которых ф-я Yx имеет разные знаки
Введите левое значение: X1=-5
Введите правое значение: X2=0
Введите точность (например точность ур-я Yx не 0, а 0.001): t=0.001
При X=-2.50000 Yx= 6.07322 x1=-2.50000 x2= 0.00000
При X=-1.25000 Yx= 1.14205 x1=-1.25000 x2= 0.00000
При X=-0.62500 Yx=-0.25779 x1=-1.25000 x2=-0.62500
При X=-0.93750 Yx= 0.35677 x1=-0.93750 x2=-0.62500
При X=-0.78125 Yx= 0.02849 x1=-0.78125 x2=-0.62500
При X=-0.70313 Yx=-0.11986 x1=-0.78125 x2=-0.70313
При X=-0.74219 Yx=-0.04699 x1=-0.78125 x2=-0.74219
При X=-0.76172 Yx=-0.00958 x1=-0.78125 x2=-0.76172
При X=-0.77148 Yx= 0.00937 x1=-0.77148 x2=-0.76172
При X=-0.76660 Yx=-0.00012 x1=-0.77148 x2=-0.76660
Достигнута заданная точность!
Для поиска другого корня вводите новый диапазон X1;X2 (По эскизу графика ф-ий)

```



Графики функций  $X^2$  и  $2^X$  можно построить в Excel



Эскизное построение графиков можно делать не вручную, а с помощью программы Excel. Точное значение точек пересечения не всегда очевидно, но можно указать точку  $X_1$ , находящуюся левее корня, и точку  $X_2$ , находящуюся правее корня.

Как видно из графика – существует три корня уравнения. Задавая небольшие диапазоны  $\{x_1; x_2\}$  вокруг этих трёх точек, с помощью программы можно последовательно найти все три корня уравнения с заданной точностью. В данном случае это следующие значения  $X$ : -0,76666; 2,0; 4,0.

В приведенном выше примере программы найдено значение  $X = -0.76660$ . При этом  $Y_x$  не 0, а  $Y_x = -0.00012$ , поскольку была задана точность 0,001. Краевые точки отрезка для поиска этого корня были заданы следующие:  $X_1 = -5$  и  $X_2 = 0$ . Достоверность этого значения очевидна из графика. Аналогично находятся и два других корня. Следует лишь изменить диапазон  $\{x_1; x_2\}$ .

Рассмотрим ещё один пример.

## 2. Решение уравнения $Y_x = 3X^2 - 5X - 2 = 0$ методом дихотомии. (Для эскиза графиков: $Y_x = 3X^2 - 5X + 2$ )

```

PROGRAM dixot2;
uses crt;
var x,x1,x2,y2,yx,t:real;
begin
  textbackground(0);
  clrscr;
  textcolor(14);
  writeln('Решение ур-я  $Y_x = 3x^2 - 5x - 2 = 0$  методом дихотомии');
  writeln('(Последовательным приближением путём деления отрезка пополам)');
  textcolor(12);
  writeln('Введите левое и правое значение X, в которых ф-я  $Y_x$  имеет разные знаки');
  write('Введите левое значение: X1=');
  read(x1);
  write('Введите правое значение: X2=');
  read(x2);
  write('Введите точность (например точность ур-я  $Y_x$  не 0, а 0.001): t=');
  read(t);
  textcolor(15);
  yx:=1;
  while (yx>t) or (yx<-t) do {пока не достигнута заданная точность- выполнять}
  begin
    y2:=3*x2*x2-5*x2-2; {знач. y по x2}
    x:=(x2+x1)/2; {выбираем точку внутри интервала}
    yx:=3*x*x-5*x-2; {знач. y по x внутри интервала}
    if ((y2>=0) and (yx>=0)) or ((y2<0) and (yx<0)) then {при совпадении знаков}
      x2:=x {перемещаем точку X2 в точку X}
    else {иначе}
      x1:=x; {перемещаем точку X1 в точку X}
  end

```

```

write('При X=',x:8:5);
write(' Yx=',Yx:8:5);
write(' x1=',x1:8:5);
writeln(' x2=',x2:8:5);
{readkey;}
end;
writeln(' Достигнута заданная точность!');
textcolor(11);
writeln('Для поиска другого корня вводите новый диапазон X1;X2 (По эскизу графика ф-ий)');
readkey
end.

```

Далее представлено, как выглядит решение программы на экране.

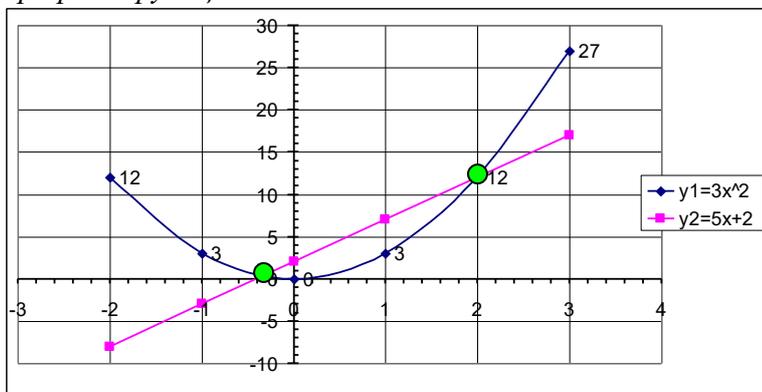
На экране:

```

Решение ур-я  $Yx=3x^2-5x-2=0$  методом дихотомии
(Последовательным приближением путём деления отрезка пополам)
Введите левое и правое значение X, в которых ф-я Yx имеет разные знаки
Введите левое значение: X1=-1
Введите правое значение: X2=0
Введите точность (например точность ур-я Yx не 0, а 0.001): t=0.001
При X=-0.50000 Yx= 1.25000 x1=-0.50000 x2= 0.00000
При X=-0.25000 Yx=-0.56250 x1=-0.50000 x2=-0.25000
При X=-0.37500 Yx= 0.29688 x1=-0.37500 x2=-0.25000
При X=-0.31250 Yx=-0.14453 x1=-0.37500 x2=-0.31250
При X=-0.34375 Yx= 0.07324 x1=-0.34375 x2=-0.31250
При X=-0.32813 Yx=-0.03638 x1=-0.34375 x2=-0.32813
При X=-0.33594 Yx= 0.01825 x1=-0.33594 x2=-0.32813
При X=-0.33203 Yx=-0.00911 x1=-0.33594 x2=-0.33203
При X=-0.33398 Yx= 0.00456 x1=-0.33398 x2=-0.33203
При X=-0.33301 Yx=-0.00228 x1=-0.33398 x2=-0.33301
При X=-0.33350 Yx= 0.00114 x1=-0.33350 x2=-0.33301
При X=-0.33325 Yx=-0.00057 x1=-0.33350 x2=-0.33325
Достигнута заданная точность!
Для поиска другого корня вводите новый диапазон X1;X2 (По эскизу графика ф-ий)

```

*Графики функций  $Yx=3X^2$  и  $Yx=5X+2$  можно построить в Excel*



Как видно из графика – существует два корня уравнения: -0,3333 и 2,0. Задавая небольшие диапазоны {x1; x2} вокруг этих двух точек, с помощью программы можно последовательно найти оба корня уравнения с заданной точностью.